Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»

Доклад на тему:

Алгоритм решения олимпиадной задачи по информатике «Травля тараканов», основанный на поиске вершинных покрытий графов

Автор: Кулаков Юрий Владимирович,
кандидат технических наук, доцент

Тамбов 2021

Актуальность работы

Насущная необходимость поиска адекватных математических моделей для представления олимпиадных задач по информатике и разработки эффективных алгоритмов их решения. Пропаганда научных знаний и подготовка учащихся к участию во всероссийских и международных олимпиадах по информатике и программированию.

Объект, предмет и гипотеза исследования

Объект исследования: олимпиадная задача по информатике «Травля тараканов».

Предмет исследования: алгоритм решения олимпиадной задачи по информатике «Травля тараканов».

Гипотеза исследования: наименьшее число гнёзд для заражения есть мощность наименьшего множества вершин, покрывающих остальные вершины дерева гнёзд через соответствующие цепи заданной длины.

Цель и задачи исследования

Цель исследования: разработка алгоритма решения олимпиадной задачи по информатике «Травля тараканов».

Задачи исследования:

- Выбрать математическую модель олимпиадной задачи.
- Выбрать метод представления модели в памяти ЭВМ.
- Разработать метод поиска решения задачи.
- Спроектировать алгоритм решения задачи.
- Рассмотреть характерные примеры реализации разработанного алгоритма.

Постановка олимпиадной задачи (начало)

Произошло ужасное событие – в квартире доктора Шелдона Купера завелись тараканы! Пока все насекомые не будут убиты, Шелдон не успокоится.

Чтобы вычислить тараканьи гнёзда, Шелдон поймал одного таракана. Проведя эксперимент, доктор выяснил, что этот таракан является разведчиком, а значит, посещает все гнёзда. Установив на таракане маленький передатчик, Шелдон отпустил его.

Постановка олимпиадной задачи (продолжение)

Проследив путь таракана в течение нескольких часов, доктор узнал всю информацию о гнёздах и путях между ними. Оказалось, что количество гнёзд равно n, а между каждой парой гнёзд существует ровно один тараканий путь. Таким образом, все пути образуют дерево, в вершинах которого располагаются гнёзда, соединённые неориентированными рёбрами – отрезками пути.

Постановка олимпиадной задачи (окончание)

Шелдон – вундеркинд, и еще в девять лет выяснил, что каждый таракан за день по своей любопытности посетит все гнёзда, которые находятся не более, чем в k отрезках пути от гнезда, в котором он этот день начал. Также Шелдон считает, что до его действий в каждом гнезде есть хотя бы один таракан.

После сбора всей информации, Шелдон хочет заразить некоторые гнёзда ядом так, чтобы каждый таракан в течение следующего дня побывал хотя бы в одном заражённом гнезде. Для экономного использования яда, Шелдон написал программу, которая вычисляет наименьшее число гнёзд, которые необходимо заразить.

Алгоритм решения задачи (начало)

Шаг 1. Ввести исходные данные: число гнёзд n, расстояние k и рёбра дерева гнёзд G.

Шаг 2. Если $k = 0$, то вывести n и конец алгоритма; иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 3. Если $k \geq n - 1$, то вывести 1 и конец алгоритма; иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 4. Построить матрицу смежностей $S\,(G)$.

Шаг 5. Вычислить матрицу достижимостей $D\,(G)$: если $k = 1$, то путём заполнения единицами главной диагонали матрицы смежностей $S\,(G)$; иначе – как сумму степеней матрицы смежностей $S\,(G)$ с первой по k-ую.

Алгоритм решения задачи (окончание)

Шаг 6. Сократить матрицу достижимостей *D* (*G*) путём поглощения её строк и столбцов.

Шаг 7. Найти наименьшее вершинное покрытие дерева гнёзд *G* как наименьшее покрытие столбцов строками сокращённой матрицы достижимостей *D*’(*G*).

Шаг 8. Вывести мощность наименьшего вершинного покрытия дерева гнёзд *G* и конец алгоритма.

Решение задачи
(случай 1)

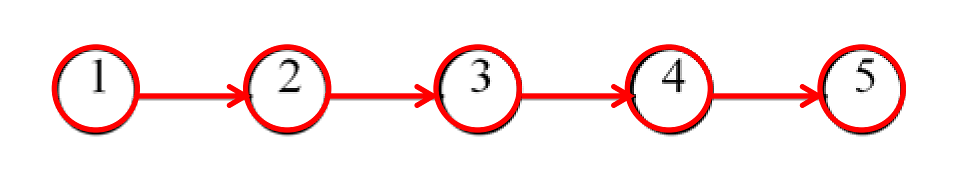
В качестве первого случая рассмотрим все исходные данные, в которых $k = 0$ (все тараканы сидят по своим гнёздам).

Нетрудно понять, что при этом необходимо заразить все n гнёзд, то есть ответом является число n.

Решение задачи (случай 2)

Ко второму случаю отнесём исходные данные, в которых $k \geq n - 1$. Из теории графов известно, что в любом дереве G с n вершинами имеется ровно $(n - 1)$ рёбер. Следовательно, при $k \geq n - 1$ достаточно заразить только одно гнездо, то есть ответом является число 1.

Даже в худшем с точки зрения решения задачи вырожденном дереве гнёзд (с максимальным расстоянием между конечными вершинами) с пятью вершинами при $k \geq 5 - 1 = 4$



достаточно заразить любое из пяти гнёзд, например, первое.

Решение задачи
(случай 3)

Здесь исходные данные характеризуются тем, что $k = 1$ и $n > 2$.

В этом случае для решения задачи необходимо определить мощность наименьшего вершинного покрытия, элементы которого покрывают через соответствующие рёбра все остальные вершины дерева гнёзд.

Пример решения задачи (случай 3)

Поиск наименьшего вершинного покрытия выполним на примере следующих исходных данных:

8 1

1 3

2 3

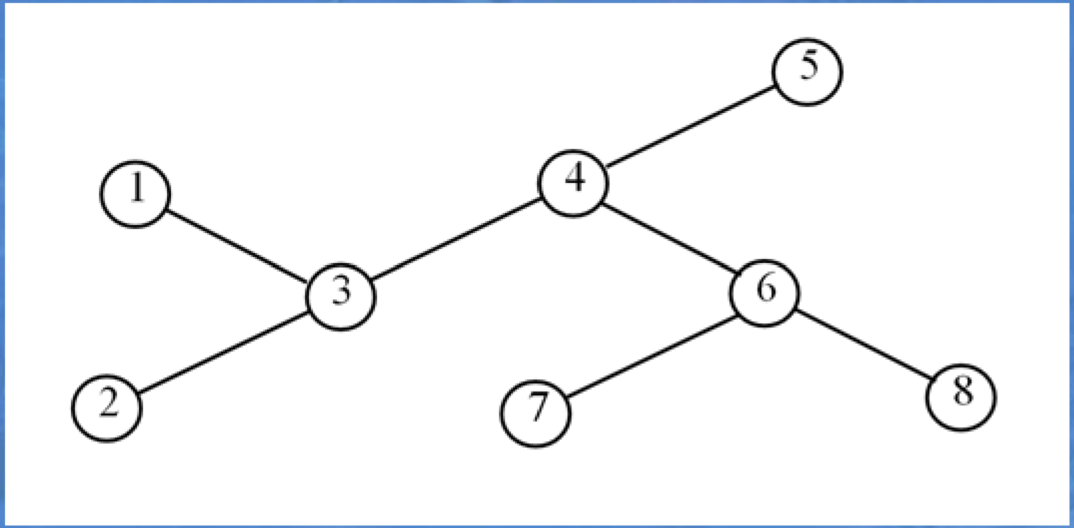
3 4

4 5

4 6

6 7

6 8



т. е. $k = 1$, в дереве гнёзд 8 вершин

и 7 рёбер: (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 7), (6, 8)

Матрица достижимостей дерева гнёзд (случай 3)

$$
D(G) = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\left|\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} .
$$

Поглощение строк матрицы *D* (*G*)

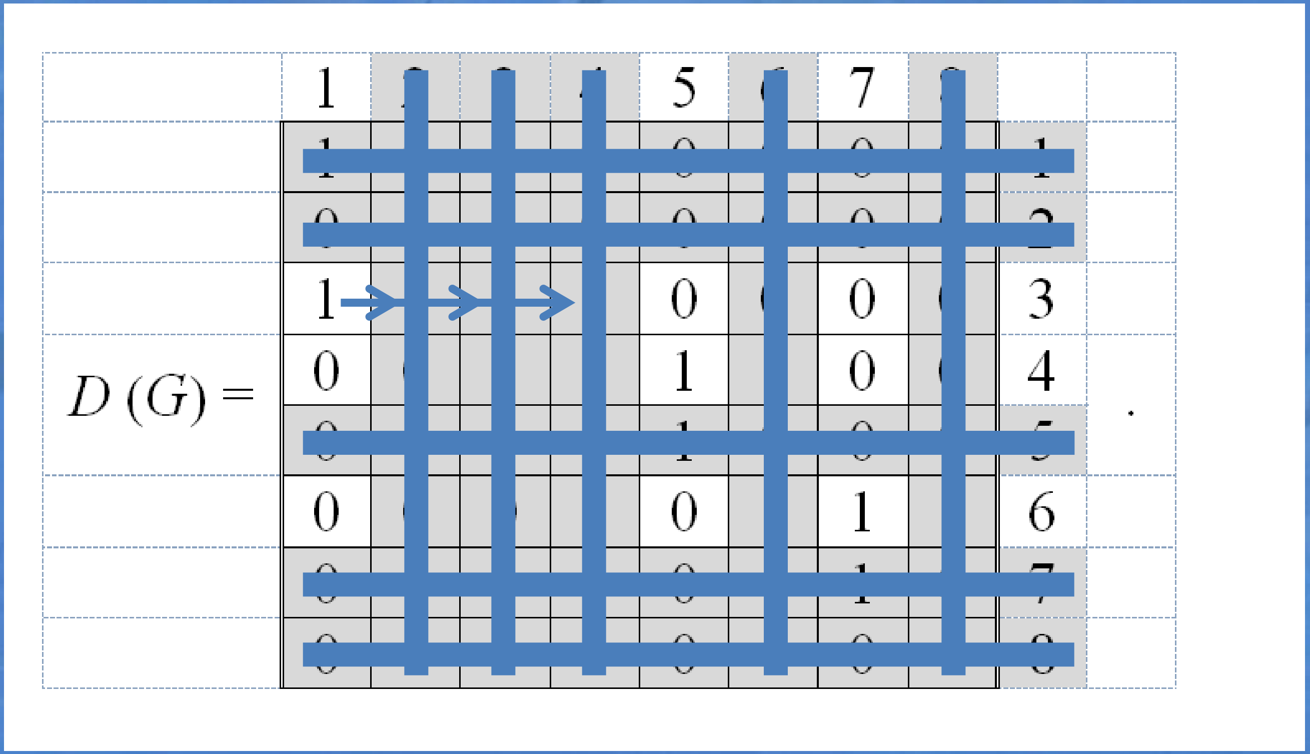
Строка 3 матрицы *D* (*G*) поглощает строки 1 и 2, поскольку множества единиц в строках 1 и 2 содержатся во множестве единиц строки 3. Аналогичным образом, строка 4 поглощает строку 5, строка 6 поглощает строки 7 и 8.

$D(G) =$

1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	2
1	1	1	1	0	0	0	0	3
0	0	1	1	1	1	0	0	4
0	0	0	1	1	0	0	0	5
0	0	0	1	0	1	1	1	6
0	0	0	0	0	1	1	0	7
0	0	0	0	0	1	0	1	8

Поглощение столбцов матрицы *D* (*G*)

С учётом поглощённых строк столбец 1 матрицы *D* (*G*) поглощает столбцы 2, 3 и 4, поскольку множества единиц столбцов 2, 3 и 4 содержат в себе множество единиц столбца 1. Аналогично, столбец 5 поглощает столбец 6, столбец 7 поглощает столбец 8.

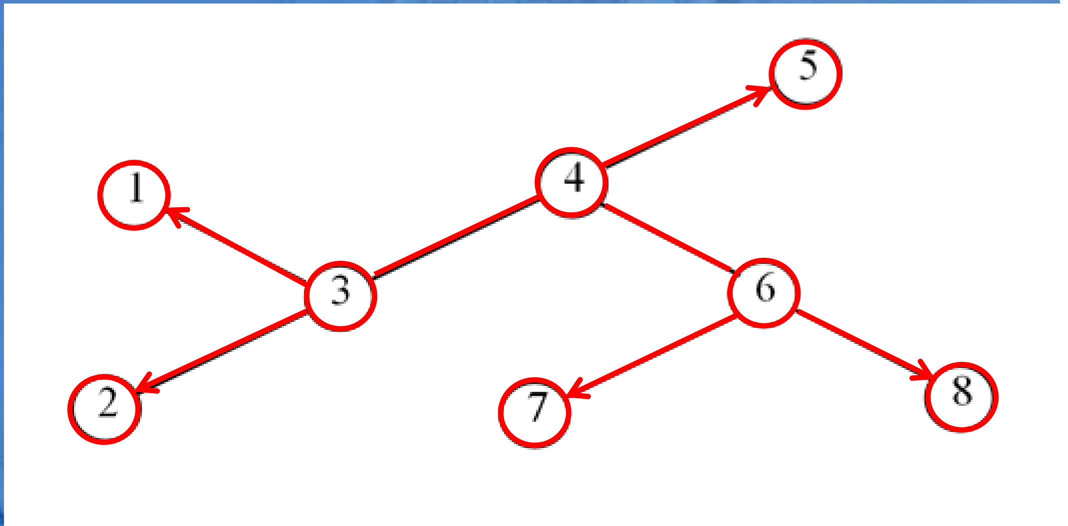


Результат решения задачи (случай 3)

Вычеркнув из матрицы D (G) поглощаемые столбцы и строки, получим матрицу:

$$D'(G) = \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}.$$

Множество строк {3, 4, 6} матрицы $D'(G)$ является наименьшим множеством строк матрицы D (G), покрывающих все её столбцы, и является наименьшим вершинным покрытием остальных вершин {1, 2, 5, 7, 8} нашего дерева:



- Мощность наименьшего вершинного покрытия, равная 3, и является ответом в решаемой задаче для рассматриваемого примера.

Решение задачи
(случай 4)

Исходные данные характеризуются неравенством $2 \le k < n - 1$.

В этом случае для решения задачи необходимо определить мощность наименьшего вершинного покрытия, вершины которого покрывают через соответствующие цепи длины k все остальные вершины графа.

Пример решения задачи (случай 4)

Поиск наименьшего вершинного покрытия выполним на примере следующих исходных данных:

8 2

1 3

2 3

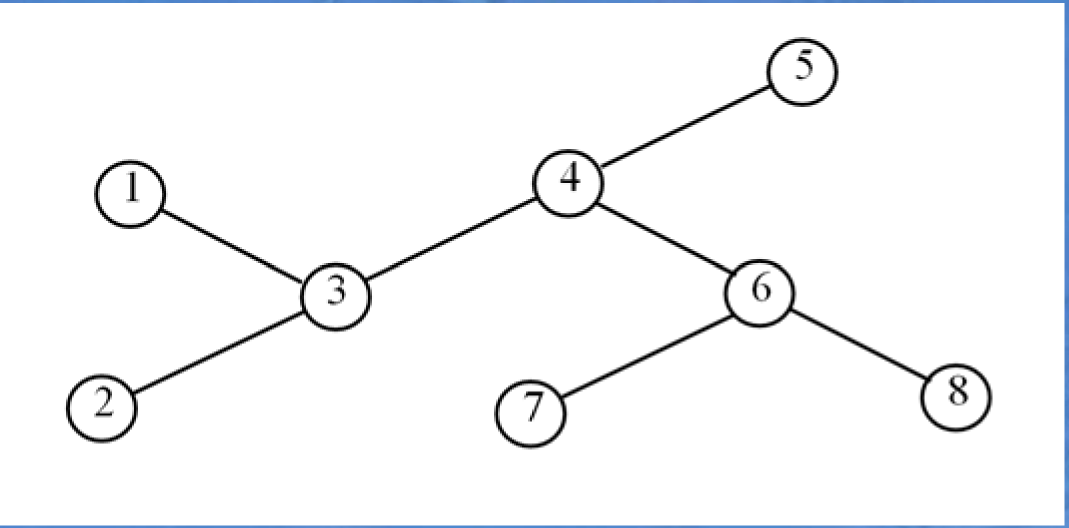
3 4

4 5

4 6

6 7

6 8



т. е. $k = 2$, в дереве 8 вершин и 7 рёбер: (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 7), (6, 8)

Матрица достижимостей дерева гнёзд (случай 4)

Построим матрицу достижимостей

$$D(G)=\sum_{i=1}^{k}[S(G)]^{i} = S(G) + S^{2}(G):$$

$$D(G)=\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 8
\end{array}.$$

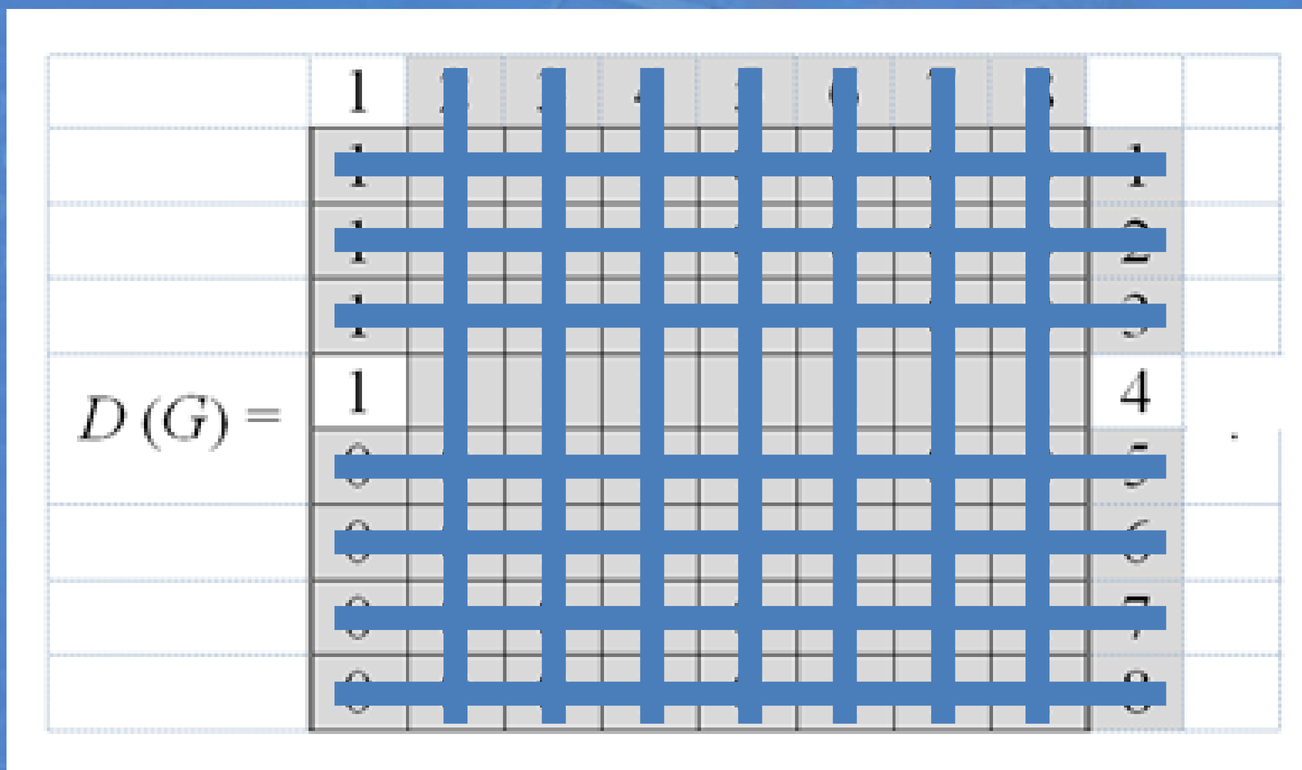
Поглощение строк матрицы D (G)

Строка 1 матрицы D (G) поглощает строку 2. Строка 3 поглощает строку 1 и строку 5. Строка 4 поглощает строки 3, 6, 7 и 8.

	1	2	3	4	5	6	7	8	
	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~
	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~2~~
	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~3~~
D (G) =	1	1	1	1	1	1	1	1	4
	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~5~~
	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~6~~
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~7~~
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~8~~

Поглощение столбцов матрицы *D* (*G*)

С учётом поглощённых строк столбец 1 матрицы *D* (*G*) поглощает все остальные столбцы (2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8).

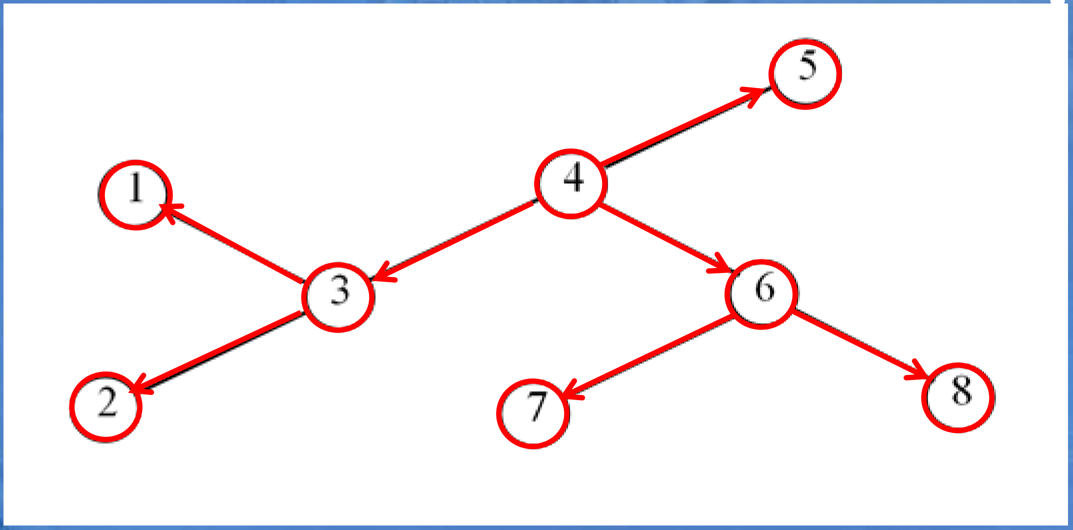


Результат решения задачи (случай 4)

Вычеркнув из матрицы $D(G)$ поглощаемые столбцы и строки, получим матрицу:

	1		
$D'(G) =$	1	4	.

Множество строк {4} матрицы $D'(G)$ является наименьшим множеством строк матрицы $D(G)$, покрывающих все её столбцы, и является наименьшим вершинным покрытием остальных вершин (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8) нашего дерева:



- Мощность наименьшего вершинного покрытия, равная 1, и является ответом в решаемой задаче для рассматриваемого примера.

Заключение

- Разработан алгоритм решения олимпиадной задачи по информатике «Травля тараканов». В нём поиск в дереве из тараканьих гнёзд наименьшего числа гнёзд для заражения с целью избавления от всех тараканов в общем случае реализуется путём определения мощности наименьшего множества вершин, покрывающих остальные вершины дерева через соответствующие цепи не менее чем заданной в условии задачи длины k.
- В особых случаях, когда $k = 0$ (все тараканы сидят по своим гнёздам), необходимо заразить все n гнёзд, а когда $k \geq n - 1$ (тараканы могут перемещаться на максимальные расстояния), достаточно заразить только одно любое гнездо.

Спасибо за внимание!